自然科學學報
1955年 第1期

關於正則型收斂因子定理

孫 恩 厚

（1955年9月17日收到）

S.T.Parker 於1950年在 Duke 雜誌上發表了一篇名爲"收斂因子與正則性定理"的文章，該文考慮了對於一切於$(0,\infty)$上 Lebesgue 可積且有 $\lim\limits_{X\to\infty}\int_0^X f(t)dt$ 存在的 $f(t)$ 而言等式

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\lim_{X\to\infty}\int_0^X \varphi(t,\alpha)f(t)dt=\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(t)dt \tag{A}$$

成立的問題．此處$\varphi(t,\alpha)$爲定義於 $t\geqq 0$，$\alpha\in E$ 且對 t 而言是單調的函數，α_0 是E的一個極限點．設$\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$，$\phi=\lim\limits_{X\to\infty}\phi(x)$.

S.T.Parker 對$\varphi(t,\alpha)$作了如下的假設:

1° 於每一$\alpha\in E$，$\varphi(t,\alpha)$是 t 的單調函數，

2° $|\phi(t,\alpha)|\leqq B$，$t\geqq 0$，$\alpha\in E$，(B 是常數)，

3° 當 $\alpha\to\alpha_0$ 時$\varphi(t,\alpha)$於$(0,\infty)$一致收斂且$\varphi'_t(t,\alpha)$當 $\alpha\to\alpha_0$ 時收斂（$t\geqq 0$）．而$\varphi'_t(t,\alpha)$於 $t\in(0,x)$及α在α_0的某一鄰域與E的交集上有界． 在這樣的假設下，他得到了$\varphi(t,\alpha)$是正則型收斂因子的充要條件爲（即(A)成立的充要條件），

(1) $\lim\limits_{X\to\infty}\int_0^X|\varphi'_t(t,\alpha)|dt<K(\alpha)$. $K(\alpha)$是α於E的有限函數，

(2) $\lim\limits_{X\to\infty}\int_0^X|\varphi'_t(t,\alpha)|dt<K$. 當$\alpha$屬於$\alpha_0$的某一鄰域與$E$的交集，

（此處K爲一常數）

(3) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(t,\alpha)=1$，$(0<t\leqq y)$，

(4) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_0^x|\varphi'_t(t,\alpha)|dt=0$，$(0\leqq x<\infty)$.

他處理這個問題的主要方法是部分積分法，即

$$\int_0^x \varphi(t,\alpha)f(t)dt=\varphi(x,\alpha)\psi(x)-\int_0^x \varphi'_t(t,\alpha)\psi(t)dt.$$

爲了使用部分積分法顯然要對 $\varphi(t,\alpha)$ 加上更多的限制，但是如果將 Lebesgue 積分 $\int_0^x \varphi(t,\alpha)f(t)dt$ 變形成 Lebesgue-Stieltjes 積分 $\int_0^x \varphi(t,\alpha)d\psi(t)$ 自然可引用部分積分法（L-S 積分的部分積分法）．另外一方面．對 $\varphi(t,\alpha)$ 作了如此強的假設，我們容易看出定理中(1)，(2)，(4)三個條件都是多餘的．（這部分工作已由本屆畢業生李瑞雲完成）．

事實上，因爲 $\varphi(t,\alpha)$ 對 t 是單調的，已沒有必要對 $\varphi(t,\alpha)$ 作如此強的假設．本文的目的在於推廣 S. T. Parker 的結果而假設 $\varphi(t,\alpha)$ 適合下列比較簡單的條件：

(1°) 於每一 $\alpha\in E$（E 爲一實數集合並有極限點 α_0），$\varphi(t,\alpha)$ 對 t（$t\geqq 0$）是單調的，

(2°) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(t,\alpha)=\varphi(t)$，當 $t>0$ 時，

(3°) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(0,\alpha)=\varphi(0+)$.

在這樣的假設下，本文考慮了對於一切 $\psi(t)\in\mathscr{C}$（即 $\psi(t)$ 爲 $t\geqq 0$ 上的絕對連續函數且 $\psi(0)=0$）而言，有下列等式成立的問題，

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(t,\alpha)d\psi(t)=\lim_{t\to\infty}\psi(t). \qquad (A')$$

本文首先根據 Lebesgue-Stieltjes 積分的部分積分公式得到了

定理 1． 設 $\varphi(t,\alpha)$ 對 t 而言是單調的，則於一切 $\psi(t)\in\mathscr{C}$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\psi$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x\varphi(t,\alpha)d\psi(t)$ 存在的充要條件爲 $\varphi(t,\alpha)$ 對於 t 而言是有界的（或 $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,\alpha)$ 存在）．

進一步，關於 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_0^\infty\varphi(t,\alpha)d\psi(t)$ 存在的問題（$\int_0^\infty$ 意即 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x$）得到下列的定理．

定理 2． 設於每一 $\alpha\in E$，$\varphi(t,\alpha)$ 是 t 的單調函數且於 $t\geqq 0$ 時有 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(t,\alpha)=\varphi(t)$ 存在，則於一切 $\psi(t)\in\mathscr{C}$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\psi$ 有 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_0^\infty\varphi(t,\alpha)d\psi(t)$ 存在的充要條件爲：

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,\alpha)$存在，

(2) 有 t_0 存在使 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}}|\varphi(\infty,\alpha)-\varphi(t_0,\alpha)|<+\infty$.

最後在上列(1°)，(2°)，(3°) 假設下，得到了$\varphi(t,\alpha)$對於$\mathscr{C}$類函數是正則型收斂因子的充要條件，即

定理 3. 於(1°)，(2°)，(3°)，假設下，$\varphi(t,\alpha)$對於$\mathscr{C}$類函數是正則型收斂因子的充要條件爲

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,\alpha)$存在，當$\alpha\in E$，

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(t,\alpha)=1$，當$t>0$，

(3) 有 t_0 存在，使 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}}|\varphi(\infty,\alpha)-\varphi(t_0,\alpha)|<+\infty$.